Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas

Análisis Matemático I – Soluciones examen 20/12/13

Ejercicio 1. Estudia si el campo escalar definido por:

$$f(x,y) = \frac{x\operatorname{sen} y - y\operatorname{sen} x}{x^2+y^2}, \quad f(0,0)=0$$

es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$. Calcula $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$ e indica si es de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Solución. En virtud de la regla de la cadena, en todo punto $(x,y)\neq(0,0)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= \frac{(x^2+y^2)(\operatorname{sen} y - y\cos x) - 2x(x\operatorname{sen} y - y\operatorname{sen} x)}{(x^2+y^2)^2} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} y - y\cos x}{x^2+y^2} - \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x\operatorname{sen} y - y\operatorname{sen} x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

función que es continua en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Puesto que $f(0,y)=f(x,0)=0$ se tiene que $D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0)=0$.

Pongamos $g(x,y)=\operatorname{sen} y - y\cos x$ y $h(x,y)=x\operatorname{sen} y - y\operatorname{sen} x$. Como $h(x,y)=-h(y,x)$ tenemos que:

$$\begin{gathered} D_1 g(x,y) = y\operatorname{sen} x, \quad D_2 g(x,y) = \cos y - \cos x, \\ D_{11} g(x,y) = y\cos x, \quad D_{12} g(x,y) = \operatorname{sen} x, \quad D_{22} g(x,y) = -\operatorname{sen} y \\ D_1 h(x,y) = -D_2 h(y,x) = \operatorname{sen} y - y\cos x, \quad D_{11} h(x,y) = -D_{22} h(y,x) = y\operatorname{sen} x \\ D_{21} h(x,y) = \cos y - \cos x, \quad D_{111} h(x,y) = -D_{222} h(y,x) = y\cos x \\ D_{211} h(x,y) = -D_{122} h(y,x) = \operatorname{sen} x \end{gathered}$$

Deducimos que la función g y sus derivadas parciales de primer y segundo orden se anulan en $(0,0)$ y la función h y sus derivadas parciales de primero, segundo y tercer orden se anulan en $(0,0)$ por lo que, en virtud del teorema de Taylor–Young, se verifica que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} y - y\cos x}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\operatorname{sen} y - y\operatorname{sen} x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

Como, además, se tiene que $\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant 1$ concluimos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} D_1 f(x,y) = 0$. Lo que prueba que $D_1 f$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

Como $f(x,y)=-f(y,x)$ se tiene que $D_2 f(x,y) = -D_1 f(y,x)$ de donde se sigue que $D_2 f$ también es continua en $\mathbb{R}^2$. Por tanto f es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$.

Tenemos que:

$$D_{12} f(0,0) = D_1(D_2 f)(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{D_2 f(t,0) - D_2 f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{-D_1 f(0,t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t-\operatorname{sen} t}{t^3} = \frac{1}{6}$$

La igualdad $D_2 f(x,y) = -D_1 f(y,x)$ implica que $D_1(D_2 f)(x,y) = -D_2(D_1 f)(y,x)$ y deducimos que $D_{21} f(0,0) = D_2(D_1 f)(0,0) = -\frac{1}{6}$. Concluimos, por el teorema de Schwarz, que f no es de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^2$. ☺

Comentario. Hemos hecho en clase ejercicios muy parecidos. El método seguido arriba creo que es el más cómodo pero también podemos proceder de otras formas. Por ejemplo:

$$\frac{\operatorname{sen} y - y\cos x}{x^2+y^2} = \frac{\operatorname{sen} y - y + y(1-\cos x)}{x^2+y^2} = \frac{1}{x^2+y^2}\left(y^3\frac{\operatorname{sen} y - y}{y^3} + yx^2\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

Usando que:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y - y}{y^3} = -\frac{1}{6}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{1}$$

se sigue que existe $\delta > 0$ tal que para $0 < |x| < \delta$ y $0 < |y| < \delta$ se verifica:

$$\frac{|\operatorname{sen} y - y\cos x|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{|y|^3 + |y||x|^2}{x^2+y^2} = |y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$$

de donde se sigue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen} y - y\cos x}{x^2+y^2} = 0.$$

De forma parecida puede procederse para probar que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\operatorname{sen} y - y\operatorname{sen} x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$. Para ello basta sumar y restar xy en el numerador:

$$\frac{x\operatorname{sen} y - y\operatorname{sen} x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\left(xy^3\frac{\operatorname{sen} y - y}{y^3} + yx^3\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}\right)$$

y volver a usar que $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{t-\operatorname{sen} t}{t^3} = \frac{1}{6}$ para deducir que existe $\delta > 0$ tal que para $0 < |x| < \delta$ y $0 < |y| < \delta$ se verifica:

$$\frac{|x\operatorname{sen} y - y\operatorname{sen} x|}{(x^2+y^2)^{3/2}} \leqslant \frac{|x||y|^3 + |y||x|^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

de donde se sigue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\operatorname{sen} y - y\operatorname{sen} x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0.$$

Otra posible variante de lo anterior consiste en utilizar las igualdades:

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + t^2\varphi(t), \quad \lim_{t\to 0}\varphi(t) = 0, \qquad \operatorname{sen} t = t + \frac{1}{6}t^3 + t^3\psi(t), \quad \lim_{t\to 0}\psi(t) = 0$$

que no son sino otra forma equivalente de escribir las igualdades (1). Con ello tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} y - y\cos x}{x^2+y^2} = \frac{y + \frac{1}{6}y^3 + y^3\psi(y) - y + \frac{1}{2}yx^2 - yx^2\varphi(x)}{x^2+y^2} = \frac{y^3(\frac{1}{6}+\psi(y)) + yx^2(\frac{1}{2}+\varphi(x))}{x^2+y^2} \tag{2}$$

Sea $\delta > 0$ tal que para $0 < |x| < \delta$ y $0 < |y| < \delta$ se verifique que $|\frac{1}{6} + \psi(y)| < 1$ y $|\frac{1}{2} + \varphi(x)| < 1$. Expresando en polares la igualdad (2) tenemos, supuesto que $0 < \rho < \delta$:

$$\frac{|\operatorname{sen}(\rho\cos\vartheta) - \rho\cos\vartheta\,\cos(\rho\operatorname{sen}\vartheta)|}{\rho^2} \leqslant \frac{2\rho^3}{\rho^2} = 2\rho$$

Y teniendo en cuenta la caracterización del límite en polares, deducimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} y - y\cos x}{x^2+y^2} = 0.$$

Análogamente, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{x\operatorname{sen} y - y\operatorname{sen} x}{(x^2+y^2)^{3/2}} &= \frac{x(y - \frac{1}{6}y^3 + y^3\psi(y)) - y(x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\psi(x))}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{xy^3(-\frac{1}{6} + \psi(y)) + yx^3(\frac{1}{6} - \psi(x))}{(x^2+y^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

Sea $\delta > 0$ tal que para $0 < |t| < \delta$ se verifique que $|-\frac{1}{6} + \psi(t)| < 1$. Expresando en polares la igualdad anterior tenemos, supuesto que $0 < \rho < \delta$:

$$\frac{|\rho\cos\vartheta\,\operatorname{sen}(\rho\operatorname{sen}\vartheta) - \rho\operatorname{sen}\vartheta\,\operatorname{sen}(\rho\cos\vartheta)|}{\rho^3} \leqslant \frac{2\rho^4}{\rho^3} = 2\rho$$

Y teniendo en cuenta la caracterización del límite en polares, deducimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\operatorname{sen} y - y\operatorname{sen} x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0.$$

En este ejercicio llama la atención que algunos que, más o menos, saben hacerlo no logran expresar de una manera mínimamente correcta lo que quieren hacer, y otros que no saben cómo hacerlo creen que todo vale y lo hacen a mocosuena.

Ejercicio 2. Calcula un punto (a, b, c) de coordenadas positivas perteneciente a la semiesfera de ecuación

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

en el cual el plano tangente determine con los ejes coordenados un tetraedro de volumen mínimo.

Solución. La semiesfera dada es la gráfica del campo escalar $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. El plano tangente en un punto $(a, b, f(a, b))$ viene dado por:

$$z - f(a,b) = \big\langle (D_1 f(a,b), D_2 f(a,b)) \big| (x-a, y-b) \big\rangle = -\frac{a}{f(a,b)}x - \frac{b}{f(a,b)}y + \frac{a^2+b^2}{f(a,b)}$$

Los puntos de corte con los ejes vienen dados por:

$$\begin{aligned} x = y = 0 \quad &\Longrightarrow \quad z = \frac{a^2+b^2}{f(a,b)} + f(a,b) = \frac{1}{f(a,b)} \\ y = z = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x = \frac{1}{a} \\ x = z = 0 \quad &\Longrightarrow \quad y = \frac{1}{b} \end{aligned}$$

El volumen del tetraedro determinado por el plano tangente viene dado por $V(a,b) = \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{abf(a,b)}$. Se trata de calcular el mínimo absoluto de dicha función en el abierto

$$\Omega = \left\{(a,b) : 0 < a, 0 < b, a^2 + b^2 < 1\right\}.$$

Como $abf(a,b) > 0$, el mínimo de $V(a,b)$ se alcanzará donde $abf(a,b)$ sea máximo, lo que sucederá cuando $(abf(a,b))^2 = a^2b^2(1-a^2-b^2)$ sea máximo. Nuestro problema, pues, consiste en calcular el máximo absoluto en el abierto Ω de la función $h(a,b) = a^2b^2(1-a^2-b^2)$. Como $h(a,b) = h(b,a)$ se tiene que $D_2h(a,b) = D_1h(b,a)$. Tenemos que:

$$D_1h(a,b) = 2ab^2(1-a^2-b^2) - 2a^3b^2 = 2ab^2(1-2a^2-b^2), \quad D_2h(a,b) = 2ba^2(1-2b^2-a^2)$$

Calculamos los puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{r} D_1h(a,b) = 0 \\ D_2h(a,b) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 1-2a^2-b^2 = 0 \\ 1-2b^2-a^2 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} b^2 = 1-2a^2 \\ 1-2(1-2a^2)-a^2 = 0 \end{array}\right\}$$

Fácilmente obtenemos que $(a_0,b_0) = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ es el *único* punto crítico de h en Ω. Por tanto, el máximo absoluto debe alcanzarse en dicho punto. Calculemos la matriz hessiana. Como $D_2h(a,b) = D_1h(b,a)$ se verifica que $D_{22}h(a,b) = D_{11}h(b,a)$. En particular $D_{22}h(a_0,b_0) = D_{11}h(a_0,b_0)$. Tenemos que:

$$D_{11}h(a,b) = -8a^2b^2 + p(a,b), \quad D_{12}h(a,b) = -4ab^3 + q(a,b)$$

donde $p(a_0,b_0) = q(a_0,b_0) = 0$. Por tanto la matriz hesiana de h en (a_0,b_0) es:

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$$

que corresponde a una forma cuadrática definida negativa, lo que nos dice que en el punto (a_0,b_0) el campo escalar h tiene un máximo relativo estricto y, como es el único punto crítico, dicho máximo relativo debe ser el máximo absoluto de h en Ω.

El volumen mínimo pedido es $V(a_0,b_0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ☺

Comentario. En este ejercicio se supone, como queda implícito en el enunciado, la existencia del mínimo absoluto que se pide calcular. Bajo este supuesto, el razonamiento anterior prueba que el mínimo absoluto se alcanza en el punto indicado.

También puede procederse en este ejercicio de una forma mucho más directa que al mismo tiempo prueba que el mínimo calculado es absoluto. Para ello, supuesto que $a > 0$, $b > 0$ y $a^2 + b^2 < 1$, basta aplicar la desigualdad de las medias al producto $a^2b^2(1-a^2-b^2)$. Tenemos que:

$$\sqrt[3]{a^2b^2(1-a^2-b^2)} \leqslant \frac{a^2+b^2+1-a^2-b^2}{3} = \frac{1}{3}$$

y la igualdad se da si, y sólo si, es $a^2 = b^2 = 1-a^2-b^2$, lo que implica que $(a,b) = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Volvemos a obtener así la misma solución, pero ahora sabemos que el máximo *absoluto* de la cantidad

$\sqrt[3]{a^2b^2(1-a^2-b^2)}$ y, por tanto, de la cantidad $a^2b^2(1-a^2-b^2)$ cuando $(a,b)\in\Omega$ se alcanza en el punto $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

También podemos simplificar un poquito los cálculos del plano tangente y los puntos de corte observando que, a efectos de lo que se pide en el ejercicio, da igual considerar la esfera completa que viene dada implícitamente por los puntos que verifican la igualdad $h(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$. Con ello se evita la presencia de la raíz cuadrada. El plano tangente en un punto (a,b,c) de la esfera viene dado por

$$\big\langle \nabla h(a,b,c) \big| (x-a, y-b, z-c) \big\rangle = \big\langle (2a,2b,2c) \big| (x-a,y-b,z-c) \big\rangle = 0 \iff ax+by+cz=1$$

y, supuesto que $a>0, b>0, c>0$, se vuelven a obtener los mismos puntos de corte: $(1/a,0,0)$, $(0,1/b,0)$ y $(0,0,1/c)$ donde $c=\sqrt{1-a^2-b^2}$.

Me llama la atención en este ejercicio el trabajo que a muchos os cuesta calcular el plano tangente y los errores de cálculo en algo tan elemental.

Ejercicio 3. Clasifica los extremos relativos de la función

$$f(x,y)=x^3+y^3-xy^2-x+16$$

Solución. Calculemos los puntos críticos. Tenemos que

$$D_1 f(x,y)=3x^2-y^2-1, \quad D_2 f(x,y)=3y^2-2xy=y(3y-2x)$$

Por tanto

$$\left.\begin{array}{l} 3x^2-y^2-1=0 \\ 3y^2-2xy=y(3y-2x)=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \Longrightarrow 3x^2-1=0 \Longrightarrow x=\pm 1/\sqrt{3} \\ y=2x/3 \Longrightarrow 3x^2-4x^2/9-1=0 \Longrightarrow x=\pm 3/\sqrt{23} \end{array}\right.$$

Obtenemos los puntos críticos $(0,\pm 1/\sqrt{3})$ y $\pm(3/\sqrt{23}, 2/\sqrt{23})$. La matriz hesiana de f en un punto (x,y) viene dada por:

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} 6x & -2y \\ -2y & 6y-2x \end{pmatrix}$$

Tenemos que

$$H(0,1/\sqrt{3})=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad H(0,-1/\sqrt{3})=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

el determinante de estas matrices es negativo por lo que la forma cuadrática correspondiente es indefinida y los puntos críticos $(0,\pm 1/\sqrt{3})$ son puntos de silla.

Tenemos que

$$H(3/\sqrt{23}, 2/\sqrt{23})=\frac{1}{\sqrt{23}}\begin{pmatrix} 18 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \qquad H(-3/\sqrt{23}, -1/3\sqrt{23})=\frac{1}{\sqrt{23}}\begin{pmatrix} -18 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

La forma cuadrática asociada a la matriz $H(3/\sqrt{23}, 2/\sqrt{23})$ es definida positiva por lo que en el punto $(3/\sqrt{23}, 2/\sqrt{23})$ hay un mínimo relativo estricto.

La forma cuadrática asociada a la matriz $H(-3/\sqrt{23}, -2/\sqrt{23})$ es definida negativa por lo que en el punto $(-3/\sqrt{23}, -2/\sqrt{23})$ hay un máximo relativo estricto. ☺

Comentario. Este ejercicio es un regalito. Los errores que hay se deben principalmente a que no simplificáis.

Ejercicio 4. Calcula la derivada de $h(x,y) = \dfrac{x-y}{1+\log(1+x^2y^2)}$ en el punto $(-1,-1)$ en la dirección dada por el vector ortogonal (de norma 1) en el punto $(1,1)$ a la curva de nivel del campo $f(x,y) = x\,y^3 + x^3 y$ que pasa por dicho punto.

Solución. Sabemos que el vector gradiente de un campo escalar en un punto es ortogonal a la curva de nivel que pasa por dicho punto. Tenemos que $\nabla f(1,1) = (D_1 f(1,1), D_2 f(1,1)) = (4,4)$. Normalizando este vector obtenemos la dirección $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

La derivada del campo escalar h en el punto $(-1.-1)$ en la dirección del vector $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ viene dada por $\left\langle \nabla h(-1,-1) \middle| (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \right\rangle$. Todo lo que hay que hacer es calcular el gradiente de h en $(-1,-1)$. Ahora bien, como $h(x,y) = -h(y,x)$ se verifica que $D_2 h(x,y) = -D_1 h(y,x)$ y por tanto $D_2 h(-1,-1) = -D_1 h(-1,-1)$. Pongamos $\alpha = D_1 h(-1,-1)$. Tenemos que:

$$\left\langle \nabla h(-1,-1) \middle| (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \right\rangle = \left\langle (\alpha, -\alpha) \middle| (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \right\rangle = 0.$$

☺

Comentario. Este ejercicio es otro regalito, ni siquiera es preciso tomarse el trabajo de calcular $D_1 h(-1,-1)$.

Ejercicio 5. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase $\mathcal{C}^1$. Supongamos que Ω es un conjunto convexo y que $\mathbf{0} \in \Omega$. Prueba que para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ se verifica que:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) + \sum_{j=1}^{n} x_j \int_0^1 D_j f(t\mathbf{x})\,\mathrm{d}t$$

1. **Solución. Como Ω es convexo y $\mathbf{0} \in \Omega$, dado $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ se verifica que el segmento $[\mathbf{0}, \mathbf{x}] = \{t\mathbf{x} : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ está contenido en Ω. Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ la curva dada por $\gamma(t) = t\mathbf{x}$. Definamos $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $h(t) = (f \circ \gamma)(t)$. Por la regla de la cadena, tenemos que:**

$$h'(t) = \left\langle \nabla f(\gamma(t)) \middle| \gamma'(t) \right\rangle = \left\langle \nabla f(t\mathbf{x}) \middle| \mathbf{x} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j D_j f(t\mathbf{x})$$

Como f es de clase $\mathcal{C}^1$ la derivada de h es continua. Por el teorema fundamental del Cálculo integral (o por la regla de Barrow) se tiene que:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0}) = h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t)\,\mathrm{d}t \;= \sum_{j=1}^{n} x_j \int_0^1 D_j f(t\mathbf{x})\,\mathrm{d}t$$

☺

Comentario. Este ejercicio es otro regalito ¿verdad?.